XXXV TORNEO INTERNACIONAL DE LAS CIUDADES
OTOÑO 2013 DEL HEMISFERIO NORTE
NIVEL JUVENIL

1. Se tienen 100 varillas rojas, 100 varillas amarillas y 100 varillas verdes. Se sabe que con todas las combinaciones posibles de tres varillas con una de cada color se forma un triángulo. Demostrar que entonces para uno de los tres colores (por lo menos) vale que con cualesquiera tres varillas de ese color siempre se forma un triángulo. 5 PUNTOS

2. Un profesor de matemática eligió 10 enteros consecutivos y se los dio a Alex y Beto. Cada uno de ellos debe dividir estos números en 5 parejas, en cada pareja calcular la multiplicación de los dos números y luego sumar los 5 números obtenidos. Mostrar que los dos chicos pueden formar parejas distintas y, sin embargo, obtener el mismo resultado final. 5 PUNTOS

3. Sea ABC un triángulo rectángulo en C y sea N el punto medio de la semicircunferencia de diámetro CB exterior al triángulo. Demostrar que AN divide a la bisectriz del ángulo C por la mitad. 6 PUNTOS

4. En el plano hay dibujado un tablero cuadrado de 8×8 coloreado como el tablero de ajedrez. Ana elige una casilla y un punto interior de esa casilla, pero no los marca. Beto puede dibujar cualquier polígono sin entrecruzamiento y preguntarle a Ana si el punto que eligió es interior o exterior al polígono. Determinar el número mínimo de preguntas que necesita Beto para saber con certeza si el punto que eligió Ana es blanco o negro. 7 PUNTOS

5. En una circunferencia se inscribe un polígono de 101 lados. Desde cada vértice de este polígono se traza la perpendicular al lado opuesto hasta que corta a dicho lado o a su prolongación. Demostrar que al menos una de las 101 perpendiculares corta al lado a opuesto (no a la prolongación). 9 PUNTOS

6. El número

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$

se representa como fracción irreducible. Si se sabe que $3n+1$ es un número primo, demostrar que el numerador de esta fracción es un múltiplo de $3n+1$. 10 PUNTOS

7. Sobre una mesa hay 11 pilas de 10 piedras cada una. Ana y Beto juegan por turnos al siguiente juego. En cada turno sacan, a elección, 1, 2 o 3 piedras. Ana tiene que sacar todas las piedras de un turno (1, 2 o 3) de una sola pila. Beto en un turno puede sacar 1, 2 o 3 piedras, pero no más que una piedra de cada pila. Ana comienza el juego. Pierde el primero que en su turno no puede jugar. ¿Cuál de los jugadores, Ana o Beto, se puede garantizar la victoria no importa lo bien que juegue el oponente? 12 PUNTOS

XXXV TORNEO INTERNACIONAL DE LAS CIUDADES
OTOÑO 2013 DEL HEMISFERIO NORTE
NIVEL MAYOR

1. En el plano hay dibujado un tablero cuadrado de 8×8 coloreado como el tablero de ajedrez. Ana elige una casilla y un punto interior de esa casilla, pero no los marca. Beto puede dibujar cualquier polígono sin entrecruzamiento y preguntarle a Ana si el punto que eligió es interior o exterior al polígono. Determinar el número mínimo de preguntas que necesita Beto para saber con certeza si el punto que eligió Ana es blanco o negro. 5 PUNTOS

2. Hallar todos los enteros positivos *n* para los que se satisface el siguiente enunciado:

Para todos dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ de grado *n* existen dos monomios ax^k y bx^ℓ, *k* y ℓ enteros, $0 \le k, \ell \le n$, tales que los gráficos de $P(x)+ax^k$ y $Q(x)+bx^\ell$ no tienen puntos comunes. 6 PUNTOS

3. Sea *ABC* un triángulo equilátero de centro *O*. Una recta trazada por *C* corta a la circunferencia circunscrita del triángulo *AOB* en los puntos *D* y *E*. Demostrar que los puntos *A*, *O* y los puntos medios de los segmentos *BD* y *BE* son concíclicos.
ACLARACIÓN: La *circunferencia circunscrita* de un triángulo es la que pasa por los tres vértices del triángulo. 6 PUNTOS

4. ¿Es cierto que todo número entero es igual a la suma de los cubos de una cantidad finita de enteros distintos?
7 PUNTOS

5. Decidir si existen dos funciones a valores enteros f y g tales que para todo entero *x* se tiene

a) $f(f(x)) = x$, $g(g(x)) = x$, $f(g(x)) > x$, $g(f(x)) > x$. 3 PUNTOS

b) $f(f(x)) < x$, $g(g(x)) < x$, $f(g(x)) > x$, $g(f(x)) > x$. 5 PUNTOS

6. Sobre una mesa hay 11 pilas de 10 piedras cada una. Ana y Beto juegan por turnos al siguiente juego. En cada turno sacan, a elección, 1, 2 o 3 piedras. Ana tiene que sacar todas las piedras de un turno (1, 2 o 3) de una sola pila. Beto en un turno puede sacar 1, 2 o 3 piedras, pero no más que una piedra de cada pila. Ana comienza el juego. Pierde el primero que en su turno no puede jugar. ¿Cuál de los jugadores, Ana o Beto, se puede garantizar la victoria no importa lo bien que juegue el oponente? 9 PUNTOS

7. En el plano está dibujada una línea quebrada con entrecruzamientos. Cada lado de esta línea está cortado exactamente una vez y no hay tres lados que se corten en el mismo punto. Además, no hay entrecruzamientos que pasen por un vértice ni hay dos lados que compartan algún segmento. ¿Puede ocurrir que todo punto de entrecruzamiento divida a ambos lados en mitades? 14 PUNTOS